

**Examen, MA-1A2 Cálculo Diferencial e Integral**  
**Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile**  
**Semestre 2007/2 (26 de Noviembre)**

**Instrucciones:** Este examen consta de 6 preguntas de 3 puntos cada una. La nota del examen se calcula mediante la fórmula  $N_{ex} = \frac{P}{3} + 1.0$ , donde  $P$  es el puntaje obtenido.

**P1)** Considere la integral  $I_n = \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^n x \, dx$ . Demuestre que:

a) Para todo  $n \in \mathbb{N}$  se cumple  $I_{n+1} < I_n$ .

b) Para todo  $n \in \mathbb{N}$  se cumple  $I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}$ .

c) Para todo  $n > 1$  se cumple  $\frac{1}{2(n+1)} < I_n < \frac{1}{2(n-1)}$ .

**Solución**

a) En el intervalo  $[0, \frac{\pi}{4}]$  se sabe que  $0 \leq \operatorname{tg} x \leq 1$  por lo tanto, para todo  $n \in \mathbb{N}$  se cumple que

$$\operatorname{tg}^{n+1} x \leq \operatorname{tg}^n x, \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{4}].$$

..... 0.5 pts.

De aquí se deduce que  $I_{n+1} \leq I_n$  ..... 0.2 pts.

Para probar que la desigualdad es estricta, basta notar que para  $x = \frac{\pi}{8}$  se tiene que  $\operatorname{tg} x < 1$  y por lo tanto  $\operatorname{tg}^{n+1} x < \operatorname{tg}^n x$ . ..... 0.3 pts.

b) Integrando directamente se tiene que para todo  $n \in \mathbb{N}$  se cumple

$$\begin{aligned} I_{n+2} + I_n &= \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^n x (\operatorname{tg}^2 x + 1) \, dx = \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^n x \sec^2 x \, dx = \left. \frac{\operatorname{tg}^{n+1} x}{n+1} \right|_0^{\pi/4} \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

..... 1.0 pts.

c) Usando (a) se tiene que para todo  $n > 1$  se cumple  $\frac{1}{2}(I_{n+2} + I_n) < I_n < \frac{1}{2}(I_n + I_{n-2})$ . 0.5 pts.

Usando (b) se concluye. .... 0.5 pts.

**P2)** Sea  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función creciente, continua en  $[0, +\infty)$ , derivable en  $(0, +\infty)$  y tal que  $f(0) = 0$ .

Demuestre que la función  $F(x) = x \int_0^x f^2(t) \, dt$  es creciente y convexa en  $[0, +\infty]$ .

<b>Solución</b>	
Derivando se tiene que	
$F'(x) = \int_0^x f^2(t) \, dt + x f^2(x)$	
.....	1.0 pts.
Como esta expresión es positiva en $(0, \infty)$ se concluye que $F$ es creciente. ....	0.5 pts.
Derivando nuevamente se tiene que	
$F''(x) = 2f^2(x) + 2xf(x)f'(x)$	
.....	0.5 pts.
Como $f$ es creciente y $f(0) = 0$ entonces $f(x) \geq 0$ para todo $x \geq 0$ . ....	0.5 pts.
Con esto $F''(x) \geq 0$ y se concluye que $F$ es convexa. ....	0.5 pts.

**P3)** Considere la curva  $\Gamma$  parametrizada por

$$\vec{r}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sen t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{donde } t \in [0, +\infty).$$

Encuentre los vectores tangente  $\hat{T}(t)$  y normal  $\hat{N}(t)$  y el largo total de la curva  $\Gamma$ .

### Solución

Derivando se tiene que

$$\vec{r}'(t) = -e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sen t \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} -\sen t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} = -e^{-t} \begin{pmatrix} \sen t + \cos t \\ \sen t - \cos t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

0.5 ptos.

Con esto:

$$s'(t) = e^{-t}\sqrt{3}$$

0.5 ptos.

y

$$\vec{T}(t) = \frac{-1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sen t + \cos t \\ \sen t - \cos t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

0.5 ptos.

Derivando se tiene

$$\vec{T}'(t) = \frac{-1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \cos t - \sen t \\ \cos t + \sen t \\ 0 \end{pmatrix},$$

y en consecuencia  $\|T'\| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

0.5 ptos.

Por lo tanto

$$\vec{N}(t) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos t - \sen t \\ \cos t + \sen t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

0.5 ptos.

Al integrar  $s'$  se tiene que

$$L = \int_0^\infty s'(t) dt = \int_0^\infty e^{-t}\sqrt{3} dt = \sqrt{3}.$$

0.5 ptos.

- P4)** Use el criterio integral para estudiar la convergencia de la integral impropia  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ , donde  $f(x) = \frac{e^x}{x^x}$ . Debe verificar las hipótesis del teorema.
- Indicación: Pruebe que  $f'(x) = -f(x) \ln x$ .

### Solución

Claramente  $f(x) \geq 0$ . Además

$$f'(x) = \frac{e^x x^x - e^x x^x (1 + \ln x)}{x^{2x}} = -f(x) \ln x$$

..... 1.0 pts.

Así se cumple que  $f$  es decreciente en  $(0, \infty)$  y por lo tanto se puede usar el criterio integral. ....

0.5 pts.

Estudiamos la serie  $\sum \frac{e^n}{n^n}$  mediante el criterio de la raíz enésima.

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{e}{n} \rightarrow 0$$

..... 0.5 pts.

Con esto, la serie y la integral convergen. .... 1.0 pts.

- P5)** Considere la conocida serie geométrica  $f(x) = \sum_{n \geq 0} x^n$ . Calcule  $\int_0^{1/2} f(t^2) dt$  por dos caminos, para demostrar que

$$\ln 3 = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{4^n(2n+1)}.$$

### Solución

Sabemos que  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  por lo tanto

$$\int_0^{1/2} f(t^2) dt = \int_0^{1/2} \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{1/2} \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} dt = \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t} \Big|_0^{1/2} = \frac{1}{2} \ln 3.$$

..... 1.5 pts.

Además  $f(x) = \sum_{n \geq 0} x^n$  luego

$$\int_0^{1/2} f(t^2) dt = \sum_{n \geq 0} \int_0^{1/2} t^{2n} = \sum_{n \geq 0} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^{1/2} = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{4^n(2n+1)}.$$

..... 1.5 pts.

De estos cálculos se concluye.

**P6)** Un cilindro de altura  $h$  y base circular de radio  $R$  se construye de modo que  $R = f(h)$ .

Determine las dimensiones de cilindro que maximizan su volumen, para los casos  $f(x) = e^{-x}$  y  $f(x) = e^{-x^2}$ .

### Solución

El volumen del cilindro es:

$$V = \pi h f^2(h)$$

Derivando se tiene que:

$$V' = \pi f^2(h) + \pi 2h f(h) f'(h) = \pi f(h)(f(h) + 2h f'(h))$$

En el caso  $f(x) = e^{-x}$  se tiene  $f'(h) = -f(h)$  y por lo tanto

$$V' = \pi f^2(h)(1 - 2h)$$

..... 0.5 pts.

de donde el punto de máximo es  $h = \frac{1}{2}$ . ..... 0.5 pts.

Las dimensiones del cilindro son:  $R = \frac{1}{\sqrt{e}}$  y  $h = \frac{1}{2}$ . ..... 0.5 pts.

En el caso  $f(x) = e^{-x^2}$  se tiene  $f'(h) = -2hf(h)$  y por lo tanto

$$V' = \pi f^2(h)(1 - 4h^2)$$

..... 0.5 pts.

de donde el punto de máximo es  $h = \frac{1}{2}$ . ..... 0.5 pts.

Las dimensiones del cilindro son:  $R = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}$  y  $h = \frac{1}{2}$ . ..... 0.5 pts.

Formulario:  $V = \int_a^b \pi f^2$ ,  $V = \int_a^b 2\pi x f$ ,  $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2}$ ,  $S = \int_a^b 2\pi x ds$ ,  $S = \int_a^b 2\pi f(x) ds$ .